Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie
Blatt 1 **7.3.2024**

1. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -7 & -1 & 4 \\ -5 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Menge aller reellen Vektoren b, für die das System $Ax = b$ lösbar ist. Ist diese Menge ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$?

   b) Bestimmen Sie die Menge aller reellen Vektoren b, für die das System $Ax = b$ unlösbar ist. Ist diese Menge ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$?

2. Geben Sie alle Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit a) $\mathrm{Grad}(p) = 3$, b) $\mathrm{Grad}(p) = 2$ an, die

$$p(-1) = -1, \quad p(1) = 1, \quad \int_0^1 p(x)dx = 0$$

   erfüllen.

3. Es sei $K := \{0, 1, a, b, c\}$ eine Menge mit fünf Elementen. Mit den beiden inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gemäß der Tabellen

$+$	0	1	a	b	c
0	0	1	a	b	c
1	1	a	b	c	0
a	a	b	c	0	1
b	b	c	0	1	a
c	c	0	1	a	b

$\cdot$	0	1	a	b	c
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c
a	0	a	c	1	b
b	0	b	1	c	a
c	0	c	b	a	1

   ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in K^3$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by + z &= c \\ bx + cy &= a \\ cx + by + bz &= c. \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie die Lösungsmenge des reellen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -2x - 2y + (1 - 3a)z &= -1 \\ (1 + a)x + 3y + (4 + a)z &= 0 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

   für jeden Wert des Parameters $a \in \mathbb{R}$.

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen, *nichtlinearen* Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 10x_3^{-1} &= 0 \\ -x_1(x_2 - x_3) + 2x_2x_3 &= 10. \end{aligned}$$